



РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОНКУРС ШКОЛЬНИКОВ ЧЕЛЯБИНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТСКОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ОКРУГА
ПО МАТЕМАТИКЕ, ИНФОРМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ 2026 г.
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР, 9 класс

Максимальное количество баллов – 35

1. (7 баллов) Выражение $5 * 4096^{10} + 3 * 512^{11} + 2 * 64^{10} + 8^{15} - x$ записали в восьмеричной системе счисления. Найдите минимальное значение x такое, чтобы в полученной разности количество цифр 7 превышало количество остальных цифр.

В ответе запишите сумму цифр числа x , представленного в восьмеричной системе счисления. Полученную сумму запишите в ответ в десятичном виде.

Решение: Перепишем исходную запись в виде $5 * 8^{40} + 3 * 8^{33} + 2 * 8^{20} + 8^{15} - x$.

Так как число x должно быть минимальным, постараемся получить в разности семерки в младших разрядах

40	33	20	15	0	-	номера разрядов
_ 50...030...020....010...00						
		20...010...01				
50...027.....7						

Таким образом, семерки в разности получаются с 32 по 0 разряд включительно.

Сумма цифр числа x в восьмеричной записи тогда равна 4.

Ответ: 4.

Критерии оценивания:

Полное решение – 7 баллов

Неверное решение, отсутствие решение – 0 баллов

2. (6 баллов) Дана таблица размером $60 * 60$ состоящая из белых клеток. Каждая клетка имеет свою позицию (i, j) , где i – номер строки, j – номер столбца. Нумерация начинается с 1. Исполнитель может закрашивать клетки в черный цвет, удалять их или инвертировать цвета.

Он выполнил следующий алгоритм:

- 1) Закрасил клетки, стоящие на главной диагонали (для которых $i = j$)
- 2) Закрасил все клетки, у которых $i * j$ кратно 6
- 3) Удалил все клетки в каждой третьей строке (то есть удалились строчки с порядковыми номерами 3, 6, 9 и т.д.)

4) Инвертировал цвета (заменял белые ячейки на черные, а черные на белые)
Сколько черных клеток стало в таблице после выполнения алгоритма?

Решение:

1. Закрашиваются все клетки на главной диагонали с порядковыми номерами (1, 1), (2, 2) и т.д. Таких 60 штук. Обратим внимание на условие на условие 3, так как будут удалены строки с индексами, кратными 3, тогда исключится 20 клеток, то есть закрашенных останется 40.

2. Закрашиваются все ячейки, для которых i или j кратно 6, или i кратно 2, а j кратно 3, либо j кратно 2, а i кратно 3. Обратим внимание на условие 3, тогда удаляются строки, где i кратно 6 или кратно 3. Остаются варианты, когда j кратно 6 или i кратно 2, а j кратно 3 (при этом не кратно 6). Когда j кратно 6 выбираем все элементы столбца, их $10 * 40 = 400$. Во втором случае 10 кратны 3 и не кратны 6, также берем не все строки, а только половину – четные, т.е. $10 * 20 = 200$. Итого $400 + 200 = 600$. Пересечений с первым условием нет, так как далее удаляются строки с индексами кратными 3.

3. Всего $600 + 40 = 640$ черных клеток, таблица стала размером $40 * 60 = 2400$. Белых клеток тогда $2400 - 640 = 1760$.

4. Инвертируем цвета, значит 1760 черных и 640 белых.

Ответ: 1760.

Критерии оценивания:

Полный балл – 6 баллов

Правильно выполнил шаг 1 алгоритма – 1 балл

Правильно выполнил шаг 2 алгоритма – 2 балл

Правильно выполнил шаг 3 алгоритма – 2 балл

Правильно выполнил шаг 4 алгоритма – 1 балл

3. (4 балла) Студент Василий придумал новую шифровку, вот она:

ССХБЁОРВЭФЙЙМЙНЖОКСУТОЭЕВКНАГТТБЕОНЁНСОДОГШЗЖ

К шифровке прилагается вот такой ключ, использованный для шифрования:

+0-1+2-3+1+1-2+0-3+3+1-2+4+0+0+2-1-1+3-2+4-2-3

-3+1+2-3+0-2+0+1+2+3+4-3-3-2-1+0+1-2+3+4-1-2

Расшифруйте шифровку Василия.

Решение: Каждое число соответствует сдвигу алфавита, как в шифре Цезаря.

С Т У Д Е Н Т В А С И Л И Й Н Е П Л О Х О Р А З Б И Р А Е Т С Я В К Р И П Т О Г Р А Ф И И
+0-1+2-3+1+1-2+0-3+3+1-2+4+0+0+2-1-1+3-2+4-2-3
С С Х Б Ё О Р В Э Ф Й Й М Й Н Ж О К С У Т О Э Е В К Н А Г Т Т Б Е О Н Ё Н С О Д О Г Ш З Ж

Ответ: СТУДЕНТ ВАСИЛИЙ НЕПЛОХО РАЗБИРАЕТСЯ В КРИПТОГРАФИИ

решения или Критерии оценивания:

Полное решение – 5 баллов

Только ответ без решения – 1 балл

Нет неверное решение – 0 баллов

4. (4 балла) Известно $x + y = xy = 19$.

Найдите значение выражения $(x^2 - 19x) \left(y + \frac{19}{y}\right)$.

Решение:

$$(x^2 - 19x) \left(y + \frac{19}{y}\right) = x(x - 19) \left(y + \frac{xy}{y}\right) = x(-y)(y + x) = -19^2 = -361$$

Ответ: **-361 (5 баллов)**.

Критерии оценивания:

Полное решение – 4 баллов

Нет решения, неверное решение, только ответ – 0 баллов

5. (6 баллов) Студент Василий изучает основы криптографии и решил придумать собственную хеш-функцию для слов. Он знает, что хеш-функция — это способ превратить сообщение любой длины в короткое число (хеш), причём:

- одно и то же слово всегда даёт один и тот же хеш;
- восстановить слово по хешу сложно;
- иногда разные слова могут иметь одинаковый хеш — это называется коллизией. Василий придумал хеш-функцию, работающую по следующим правилам:
- каждой букве ставим в соответствие её номер в алфавите, А=1 ... Я=33
- позиция буквы при чтении слова справа налево влияет на хеш (см. пример)
 - итоговый хеш – это остаток от деления получившегося на предыдущем шаге числа на 1000.

Василий в качестве пример посчитал хеш для слова КОЛБАСА.

К = 12 (позиция 7)

О = 16 (позиция 6)

Л = 13 (позиция 5)

Б = 2 (позиция 4)

А = 1 (позиция 3)

С = 19 (позиция 2)

А = 1 (позиция 1)

Считаем хеш:

$$\begin{aligned} & 12 \cdot 5^{7-1} + 16 \cdot 5^{6-1} + 13 \cdot 5^{5-1} + 2 \cdot 5^{4-1} + 1 \cdot 5^{3-1} + 19 \cdot 5^{2-1} + 1 \cdot 5^{1-1} = \\ & = 12 \cdot 5^6 + 16 \cdot 5^5 + 13 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 19 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = \\ & = 187500 + 50000 + 8125 + 250 + 25 + 95 + 1 = 245996 \end{aligned}$$

Берём остаток от деления на 1000 этого числа и получаем хеш 996.

После «колбасы» Василий нашёл хеш для своего имени ВАСИЛИЙ. А затем придумал и коллизию для слова ВАСИЛИЙ: другое слово (не обязательно

существующее в русском языке, это может быть любой набор букв), хеш которого совпал с хешем слова ВАСИЛИЙ.

Что ж, а сможете ли вы вычислить хеш слова ВАСИЛИЙ и найти коллизию для этого слова?

Решение:

Найдём хеш для слова ВАСИЛИЙ.

В = 3 (позиция 7)

А = 1 (позиция 6)

С = 19 (позиция 5)

И = 10 (позиция 4)

Л = 13 (позиция 3)

И = 10 (позиция 2)

Й = 11 (позиция 1)

Считаем хеш:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 5^{7-1} + 1 \cdot 5^{6-1} + 19 \cdot 5^{5-1} + 10 \cdot 5^{4-1} + 13 \cdot 5^{3-1} + 10 \cdot 5^{2-1} + 11 \cdot 5^{1-1} = \\ & = 3 \cdot 5^6 + 1 \cdot 5^5 + 19 \cdot 5^4 + 10 \cdot 5^3 + 13 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5^1 + 11 \cdot 5^0 = \\ & = 46875 + 3125 + 11875 + 1250 + 325 + 50 + 11 = 63511 \end{aligned}$$

Итоговый хеш 511.

Самая простая идея для коллизии – увеличить третью букву на 1, т.е. Л=13 заменить на М=14. Это увеличит итоговую сумму на 25. Теперь 25 нужно как-то от суммы отнять. Это можно сделать уменьшив вторую букву на 5, т.е. И=10 заменить на Д=5. Получили ВАСИМДЙ.

Ответ: 511; коллизий много, например, ВАСИМДЙ.

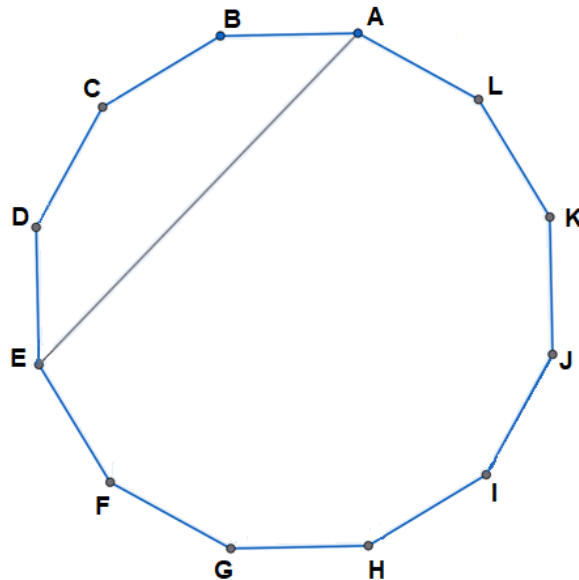
Критерии оценивания:

Правильно найден хеш – 2 балла

Приведен пример коллизии и дано пояснение к нему – 4 балла

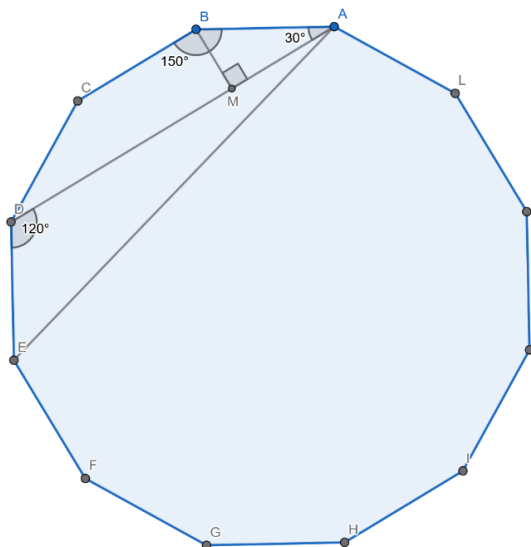
Нет решения или неверное решение, ответ без решения – 0 баллов

6. (8 баллов) Дан правильный 12-угольник со стороной 1. Чему равна площадь 5-угольника ABCDE? Чему равен квадрат длины отрезка AE?



Решение:

1) Рассмотрим равнобокую трапецию ABCD. Углы 12-угольника равны 150° , поэтому $CBD = 150^\circ$. Отсюда $BAD = CDA = 30^\circ$. Построим высоту трапеции BM, тогда сторона $AM = AB \cdot \cos(BAM) = \cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$.



Отсюда $AD = BC + 2AM = 1 + \sqrt{3}$. Теперь рассмотрим треугольник ADE. Угол $ADE = CDE - CDA = 150^\circ - 30^\circ = 120^\circ$, $DE = 1$, $DA = 1 + \sqrt{3}$. Применим теорему косинусов:

$$\begin{aligned}
 AE^2 &= DE^2 + DA^2 - 2 \cdot DE \cdot DA \cdot \cos(ADE) \\
 AE^2 &= 1^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot (-0,5) \\
 AE^2 &= 1 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3}) = 6 + 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

2) Рассмотрим равнобокую трапецию ABCD с высотой BM, $BC = 1$, $AD = 1 + \sqrt{3}$, $BM = AB \cdot \sin(BAM) = \sin(30^\circ) = 1/2$. Тогда площадь трапеции ABCD равна $\frac{BC+AD}{2} \cdot BM = \frac{1+1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Теперь рассмотрим треугольник ADE. Угол $ADE = 120^\circ$, $DE = 1$, $DA = 1 + \sqrt{3}$.

Тогда его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot DE \cdot DA \cdot \sin(ADE) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$.

И тогда площадь ABCDE равна $\frac{2 + \sqrt{3}}{4} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{5 + 2\sqrt{3}}{4}$, $6 + 3\sqrt{3}$ (4 балла за площадь; 4 балла за длину).

Критерии оценивания:

Правильно вычислена площадь – 4 балла

Правильно вычислена длина – 4 балла

Нет решения или неверное решение, ответ без решения – 0 баллов